

CONDUIRE UNE POLITIQUE PUBLIQUE OPTIMALE

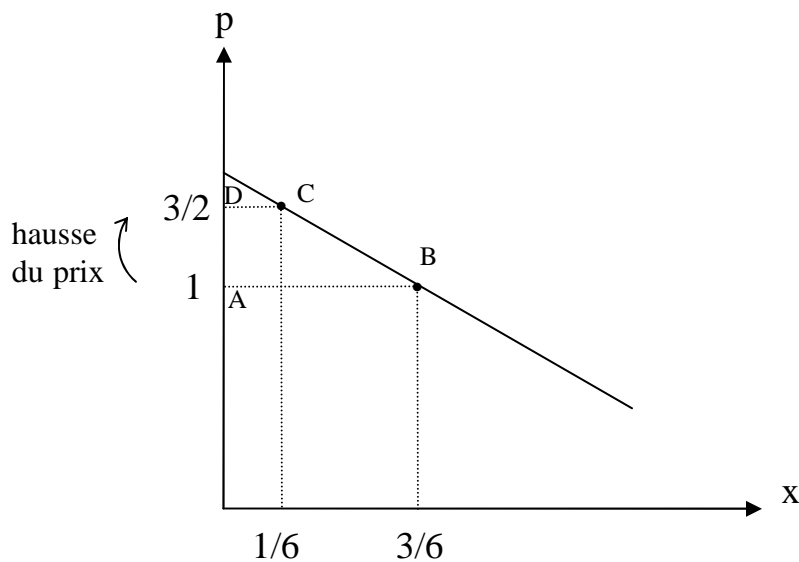
Question 5.2. Surplus du consommateur.

Un individu répartit son revenu $R=2$ entre l'achat d'un bien X (en quantité x et prix p) et d'autres dépenses dont le montant est donné M . Le prix du bien X passe d'une situation initiale $p=1$ à une situation finale $p=3/2$. A la suite de cette hausse de prix, on a observé une réduction de la consommation de bien X qui est passée de $X=1/2$ à $X=1/6$.

a. Dans l'hypothèse où l'on ne dispose que des indications précédentes donnez une approximation de la réduction du surplus du consommateur.

Approximation de la réduction du surplus du consommateur qui résulte de la hausse du prix du bien X . On approxime la courbe de demande du bien X par une droite qui passe par les 2 points que l'on connaît :

$$B \left(\frac{1}{2}; 1 \right) \quad \text{et} \quad C \left(\frac{1}{6}; \frac{3}{2} \right)$$



La réduction du surplus du consommateur est approximée par l'aire ABCD, soit :

$$\Delta S_a = - \left[\left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \right) + \frac{\left(\frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \right)}{2} \right] = - \left(\frac{1}{12} + \frac{2}{24} \right) = - \frac{2}{12} = - \frac{1}{6} \approx -0.166$$

b. Les préférences des consommateurs sont représentées par une fonction d'utilité U_1 , dont les variables sont M et x :

$$U_1(M, x) = M + \log\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

En déduire la fonction de demande.

Le consommateur choisit x et M de manière à maximiser $U_1(M, x) = M + \log\left(x + \frac{1}{2}\right)$ en

respectant la contrainte budgétaire : $px + M = R$

Le lagrangien du problème s'écrit :

$$L = M + \log\left(x + \frac{1}{2}\right) + \lambda(R - px - M)$$

$$\text{CPO : } \frac{\partial L}{\partial M} = 1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} - \lambda p = 0$$

Cela implique : $\lambda = 1$ et $\frac{1}{x + \frac{1}{2}} = p$

$$\text{Soit : } x + \frac{1}{2} = \frac{1}{p}$$

$$x = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$$

c. Calculez la réduction du surplus du consommateur.

Réduction du surplus du consommateur, non plus approximée, mais en utilisant la fonction de demande.

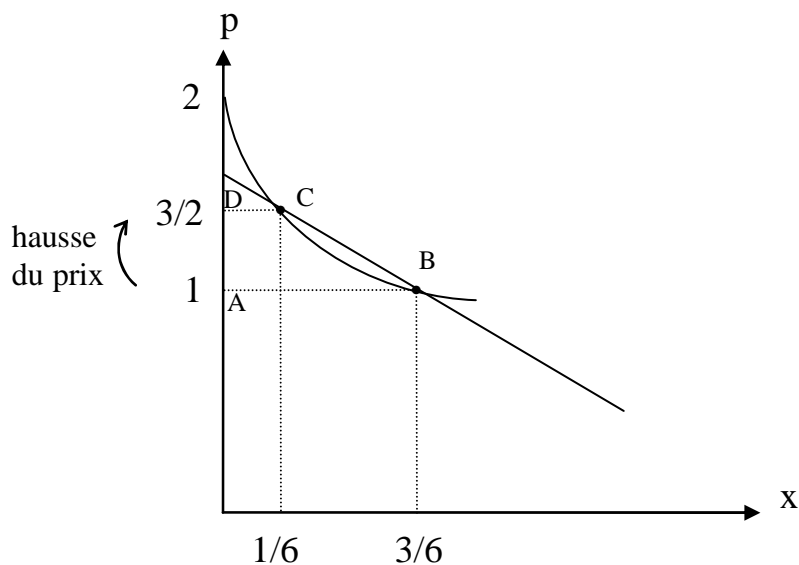
On peut tracer grossièrement la fonction de demande. On commence par exprimer la fonction de demande sous une forme mathématique classique, soit $p = f(x)$, autrement dit :

$$p = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2x + 1}. \text{ Puis on étudie cette fonction :}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{4}{(2x + 1)^2} < 0 \Rightarrow \text{courbe décroissante}$$

$$\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{16}{(2x + 1)^3} > 0 \Rightarrow \text{courbe convexe}$$

On sait aussi que la courbe passe par B et C et qu'elle coupe l'axe vertical en $p = 2$ (si $x = 0$, $p = 2$).



Dans la situation initiale, le surplus du consommateur S_i est égal à la surface comprise entre la courbe de demande et le segment AB. Pour calculer l'aire d'un domaine délimité par l'axe des abscisses et la courbe représentative d'une fonction, on utilise l'intégrale de la fonction.

$$\text{On a donc : } S_i = \int_0^{1/2} \frac{2}{2x+1} dx - \left(\frac{1}{2} \times 1\right)$$

$$\text{Rappel : } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Le tableau des primitives indique que $\frac{U'}{U}$ a pour primitive $\ln(U)$.

Donc ici, on pose : $U = 2x+1$ et $U' = 2$

$$\text{On obtient : } S_i = [\ln(2x+1)]_0^{1/2} - \frac{1}{2} = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{S_i = \ln 2 - \frac{1}{2}}$$

Dans la situation finale, le surplus du consommateur S_f est égal à l'aire de la surface comprise entre la courbe de demande et le segment DC, soit :

$$S_f = \int_0^{1/6} \frac{2}{2x+1} dx - \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{2}\right) = [\ln(2x+1)]_0^{1/6} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{S_f = \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4}}$$

La réduction du surplus est donc : $\Delta S = S_f - S_i = \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \ln 2 + \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$

$$\boxed{\Delta S = \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \approx -0.155}$$

$$\text{On a : } \frac{\Delta S_a - \Delta S}{\Delta S} = 0.072$$

L'approximation linéaire de la courbe de demande conduit donc à majorer la réduction de surplus de 7.2% par rapport à sa vraie valeur.

Remarque :

On aurait pu calculer la réduction de surplus plus rapidement grâce à la formule suivante :

$$\Delta S = -\int_1^{3/2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) dp = \int_{3/2}^1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) dp = \left[\ln p - \frac{1}{2} p\right]_{3/2}^1 = \left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\ln \frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right) = -\ln \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$