ANNEXE 3. QUELQUES FONCTIONS DE LA THEORIE DU CONSOMMATEUR

1. PRESENTATION

Nous avons précédemment écrit le programme du consommateur de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
& Max U(x_1, x_2, ..., x_n) \\
& s.c. \quad \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \leq \mathrm{R}
\end{aligned}
$$

ce qui peut s'écrire plus simplement en posant x le vecteur des N biens et p le vecteur des N prix :

$$
\begin{aligned}
& Max U(x) \\
& s.c. \quad px \leq R
\end{aligned}
$$

Ce programme permet d'obtenir les fonctions de demande x = x(p, R).

On peut donc réécrire la fonction d'utilité U(x) = U(x(p, R)) = V(p, R). La fonction V(p, R) est appelée <u>fonction d'utilité indirecte</u>. Elle indique le niveau maximum d'utilité que le consommateur peut atteindre étant donnés les prix des biens et son revenu. En d'autres termes :

$$
\begin{aligned}
& V(p, R) = \max U(x) \\
& s.c. \quad px = R
\end{aligned}
$$

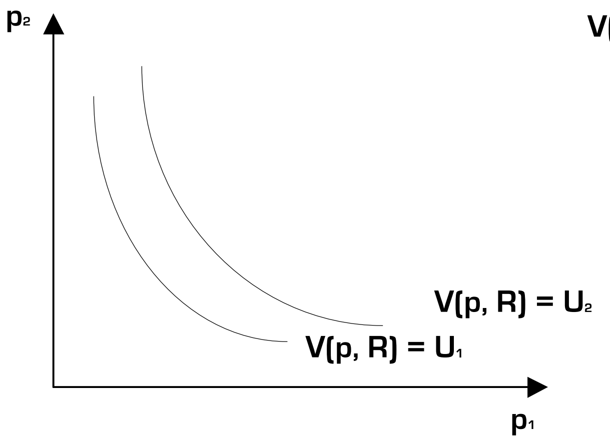
On a l'égalité px = R car à l'optimum, les demandes sont telles que le revenu est entièrement dépensé (sous l'hypothèse de non-satiété).

Les propriétés de cette fonction d'utilité indirecte sont :

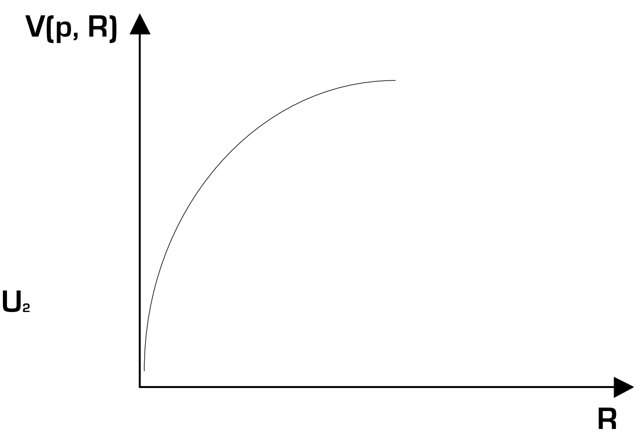
- $V(p, R)$ est non croissante en p, c'est-à-dire que si $p' \geq p$ alors $V(p', R) \leq V(p, R)$. De même, $V(p, R)$ est strictement croissante en R (si l'hypothèse de non-satiété est vérifiée).

- $V(p, R)$ est quasi-convexe en p

- $V(p, R)$ est homogène de degré 0 en p et R



R donné



p donnés

Le 1[er] graphique indique le niveau d'utilité atteint, pour un niveau de revenu donné, en fonction du prix des biens.

Le 2^{nd} graphique indique l'utilité atteinte, pour des prix données, en fonction du niveau de revenu. Ce 2^{nd} graphique peut également se lire de façon inverse comme indiquant le niveau de revenu nécessaire pour atteindre un niveau d'utilité donné, étant donné le prix des biens. La fonction qui relie ainsi le revenu et l'utilité, c'est-à-dire l'inverse de la fonction d'utilité indirecte, s'appelle la fonction de dépense et est notée E(p, U).

De façon équivalente, la fonction de dépense est donnée par le programme suivant :

$$\begin{aligned} &E(p,U) = \min px \\ &s.c. \quad U(x) \geq U \end{aligned}$$

En d'autres termes, la fonction de dépenses indique le coût minimum pour atteindre un certain niveau d'utilité . Cette fonction est strictement équivalente à la fonction de coût du producteur, elle en possède les propriétés :

- Elle est strictement non décroissante en p
- Elle est homogène de degré 1 en p (si les prix sont multipliés par un certain facteur t, le revenu étant par définition constant, la dépense est multipliée par ce facteur t)
- Elle est concave en p (si le prix d'un bien augmente les autres étant constant, la dépense doit nécessairement augmenter mais à un taux décroissant car le consommateur va substituer au bien dont le prix augmente, les autres biens)

La résolution du programme de minimisation de la dépense ci-dessus permet de définir des fonctions de demande qui sont fonction des prix et de l'utilité. Ces fonctions de demande s'appellent les fonctions de demande Hicksiennes ou fonctions de demande compensée (car elle fournit la demande optimale à utilité donnée) et sont notées h(p, U). Ces fonctions de demande ne sont bien entendues pas directement observable puisqu'elles dépendent de l'utilité. Seules les fonctions de demande exprimée en fonction des prix et du revenu sont observables, ce sont les fonctions de demande ordinaires que l'on a présentée avant x = x(p, R). On les appelle parfois les fonctions de demande Marshalliennes.

Etant données ces différentes fonctions, on peut présenter quelques identités importantes qui relient ces fonctions entre elles.

- $E(p, V(p, R)) \equiv R$: la dépense minimale pour atteindre un niveau d'utilité V(p, R) est R.

- $V(p, E(p, U)) \equiv U$: le niveau maximum d'utilité que l'on peut retirer d'une dépense E(p, U) est U

- $x_i(p, R) \equiv h_i(p, V(p, R))$: la demande Marshallienne pour un niveau de revenu R est la même que la demande Hicksienne pour un niveau d'utilité V(p, R)

- $h_i(p, U) \equiv x_i(p, E(p, U))$: la demande Hicksienne correspondant à un niveau d'utilité U est la même que la demande Marshalienne correspondant à une dépense E(p, U).

La dernière identité est probablement la plus importante car elle relie ensemble la demande Hicksienne "inobservable" et la demande Marshalienne "observable". Cette identité indique que la demande Hicksienne (c'est-à-dire la solution du programme de minimisation de la dépense) est égale à la demande Marshalienne pour un niveau approprié de revenu (plus précisément le niveau de revenu nécessaire à prix donnés pour atteindre le niveau désiré d'utilité). Cela signifie que n'importe quel panier optimal est aussi bien la solution du programme de maximisation de l'utilité que du programme de minimisation de la dépense (c'est la théorie de la dualité, cf. après).

Une implication de ces identités est l'identité de Roy qui est :

$$x_i(p,R) = -\frac{\dfrac{\partial V(p,R)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial V(p,R)}{\partial R}} \quad \forall i$$

qui indique que la demande optimale Marshalienne d'un bien i est égale au TMS entre le revenu du consommateur et le prix de ce bien.

<u>Démonstration</u> :

La fonction d'utilité indirecte est donnée par :

V(p, R) ≡ U(x(p, R))

Si on différencie par rapport à p_j, on obtient :

$$\frac{\partial V(p,R)}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

Comme x(p, R) est la fonction de demande, elle satisfait les conditions du 1er ordre du programme de maximisation de l'utilité ($\dfrac{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}}{p_i} = \lambda \quad \forall i$). On obtient donc

$$\frac{\partial V(p,R)}{\partial p_j} = \lambda \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

La fonction de demande est également telle que le revenu est entièrement dépensé, soit p.x(p, R) ≡ R. Si on différencie cette identité par rapport à p_j, on obtient :

$$x_j(p,R) + \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0$$

Si on remplace cela dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial V(p,R)}{\partial p_j} = -\lambda x_j(p,R)$$

Maintenant si l'on refait pareil mais en différenciant par rapport au revenu, on obtient pour la différenciation de la fonction d'utilité indirecte :

$$\frac{\partial V(p,R)}{\partial R} = \lambda \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i}{\partial R}$$

et pour la différenciation de la contrainte budgétaire :

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i}{\partial R} = 1$$

Ces deux dernières relations nous donne :

$\frac{\partial V(p,R)}{\partial R} = \lambda$, résultat que nous avons déjà vu qui est que le multiplicateur de Lagrange représente l'utilité marginale du revenu.

On a donc $\dfrac{\partial V(p,R)}{\partial p_j} = -\lambda x_j(p,R)$ et $\dfrac{\partial V(p,R)}{\partial R} = \lambda$, ce qui permet donc bien de démontrer l'identité de Roy :

$$x_i(p,R) = -\frac{\dfrac{\partial V(p,R)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial V(p,R)}{\partial R}} \quad \forall i$$

Les différentes fonctions que l'on a présenté dans cette section sont issus de la théorie de la dualité.

Deux systèmes sont dits duaux si les concepts utilisés dans chacun d'entre eux permettent d'établir une correspondance entre leurs résultats respectifs. Les théorèmes de dualité disent alors que si une proposition peut être prouvée dans l'un des systèmes et si l'on peut montrer qu'une proposition dans l'autre système est duale de celle-ci, alors la proposition duale est également vérifiée. Ainsi, les programmes Max U s.c. budgétaire et Min E s.c. d'utilité sont strictement équivalents.

L'intérêt est que certaines démonstrations sont parfois beaucoup plus simples à faire dans un système plutôt que dans l'autre. Ainsi, plutôt que d'analyser le système initial (primal), on peut préférer construire son système dual et y effectuer les démonstrations. C'est ce que nous allons faire plus bas dans le cadre des équations de Slutsky.

2. APPLICATION DANS LE CAS DE LA FONCTION D'UTILITE COBB-DOUGLAS

Soit la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$.

Les fonctions de demande Marshaliennes peuvent être obtenues en résolvant le programme de maximisation de l'utilité.

Les conditions du 1er ordre nous donnent :

$$\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1}=\frac{p_1}{p_2}$$

En remplaçant dans la contrainte budgétaire, on obtient :

$$R = p_1x_1 + p_2x_2 = p_1x_1 + \frac{1-a}{a}p_1x_1$$

On obtient donc les fonctions de demande Marshaliennes :

$$x_1(p_1,p_2,R)=\frac{aR}{p_1}$$
$$x_2(p_1,p_2,R)=\frac{(1-a)R}{p_2}$$

Si on remplace ces fonctions de demande dans la fonction d'utilité, on obtient la fonction d'utilité indirecte :

$$V(p_1,p_2,R)=\left(\frac{aR}{p_1}\right)^a\left(\frac{(1-a)R}{p_2}\right)^{1-a} = a^a(1-a)^{1-a}R\ p_1^{-a}p_2^{a-1}$$

La résolution du programme de minimisation de la dépense nous donne la fonction de dépenses :

$$E(p,U)=Min\ p_1x_1+p_2x_2$$
$$s.c.\quad x_1^a x_2^{1-a}=U$$

On peut réécrire ce programme : $\underset{x_1}{Min}\, p_1x_1 + p_2U^{\frac{1}{1-a}}x_1^{-\frac{a}{1-a}}$

La condition du 1er ordre est $p_1 - \frac{a}{1-a}p_2U^{\frac{1}{1-a}}x_1^{-\frac{1}{1-a}}=0$

On obtient donc les demandes Hicksiennes :

$$h_1(p_1, p_2, U) = \left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a} U$$

$$h_2(p_1, p_2, U) = \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-a}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-a} U$$

Si on remplace ces fonctions de demande, dans la fonction à minimiser, on obtient la fonction de dépense :

$$E(p_1, p_2, U) = \left[\left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a} + \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-a}\right] p_1^a p_2^{1-a} U$$

On peut également retrouver l'identité de Roy. Celle-ci indique :

$$x_i(p,R) = -\frac{\dfrac{\partial V(p,R)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial V(p,R)}{\partial R}} \quad \forall i$$

Or, si on dérive la fonction d'utilité indirecte, on obtient :

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = -\frac{a}{p_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{1}{R}$$

On a donc :

$-\dfrac{\dfrac{\partial V}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial R}} = +\dfrac{aR}{p_1} = x_1(p_1, p_2, R)$ ce qui correspond bien à l'identité de Roy.

3. L'EQUATION DE SLUTSKY

L'équation de Slutsky permet d'indiquer ce qui se passe pour la demande Marshalienne de bien j lorsque le prix du bien i varie, le prix du bien j et le revenu étant constant. Elle décompose l'effet du changement de prix en 2 effets, l'effet substitution et l'effet revenu.

Comme nous l'avons vu graphiquement, l'effet revenu provient du fait que la variation du prix du bien induit une variation du revenu réel (pouvoir d'achat) du consommateur provoquant donc une évolution de la demande de biens. A cet effet revenu, vient s'ajouter un effet de substitution, l'augmentation du prix relatif du bien i conduit le consommateur à substituer du bien j au bien i. Pour distinguer cet effet de substitution de l'effet revenu, on suppose que l'on fournit au consommateur un revenu compensatoire lui permettant soit de conserver son niveau d'utilité initiale (compensation de Hicks), soit de se procurer son panier de bien initial (compensation de Slutsky).

3.1. Compensation de Hicks

Dans le cas de la compensation de Hicks, l'effet de substitution (ou effet prix compensé) sera égale à la variation de la demande induite par une variation des prix à utilité inchangée. L'effet de substitution de Hicks est donc tout simplement $\frac{\partial h_j(p,U)}{\partial p_i}$. On l'écrit parfois aussi $\left.\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial p_i}\right|_{\bar{U}}$.

L'effet revenu va être le produit de la variation du revenu nécessaire pour garder un niveau d'utilité constant par l'influence de la variation du revenu sur la demande de bien j. L'influence de la variation du revenu sur la demande de bien j est mesurée par $\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R}$. Il reste donc à calculer la variation de revenu nécessaire pour maintenir l'utilité constante. Ce qui revient à se demander quelle est la dépense minimum que le consommateur doit faire pour conserver son utilité constante lorsque le prix du bien i varie. Cette dépense est donc mesurée par $\frac{\partial E(p,U)}{\partial p_i}$. Cependant, du fait des propriétés de la fonction de dépense, on a $\frac{\partial E(p,U)}{\partial p_j} = x_i(p,R)$. Donc au total l'effet revenu est $-\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R}.x_i(p,R)$ affecté d'un signe négatif puisque l'augmentation du prix du bien i conduit à réduire la consommation du bien j.

Donc au final l'équation de Slutsky dans le cas d'une variation compensatrice à la Hicks est :

Effet total = effet substitution + effet revenu

$$\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p,U)}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R} x_i(p,R)$$

3.2. Compensation à la Slutsky

Lorsqu'on fournit au consommateur une compensation à la Slutsky, on lui fournit un revenu compensatoire lui permettant de continuer à se procurer son panier initial.

Comme précédemment l'influence de la variation du revenu sur la demande de bien j est mesurée par $\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R}$. Il reste donc à calculer la variation de revenu nécessaire pour maintenir la possibilité de consommer le panier initial. Il consommait initialement x_i de bien i, son revenu réel (pouvoir d'achat) diminue donc au taux de x_i (1 franc d'augmentation dans le prix du bien i signifie x_i de moins à dépenser). Donc au total l'effet revenu est de $-\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R} x_i(p,R)$ (comme avant on multiplie le taux de variation de la consommation du bien j induite par une variation du revenu par le taux de variation du revenu). L'effet de substitution de Slutsky s'étudie également de la même façon qu'avant. Il est égale à la variation de la demande de bien j induite par une variation du prix du bien i sachant que l'on lui a fournit un revenu compensatoire continuer à se procurer son panier initial. On peut alors définir une fonction de demande de Slutsky $s_j(p, x)$. L'effet de substitution de Slutsky serait alors égal à $\frac{\partial s_j(p,x)}{\partial p_i}$ qui mesure l'effet de la variation du prix du bien i sur la demande de bien j sachant que le consommateur peut toujours se procurer le panier de bien initial.

Donc au total, l'effet sur la demande Marshalienne du bien j est :

$$\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial p_i} = \frac{\partial s_j(p,x)}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R} x_i$$

Effet total = effet substitution + effet revenu

On a donc 2 équations de Slutsky différentes. Cependant, on peut montrer que pour des variations infinitésimales des prix, les 2 effets de substitution sont identiques conduisant au même effet total.

On retient donc en général la $1^{\text{ère}}$ équation de Slutsky (compensation à la Hicks).

Si le prix du bien i varie de dp_i, on a alors :

$$dx_j \approx \frac{\partial x_j(p,R)}{\partial p_i} dp_i = \frac{\partial h_j(p,U)}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R} x_i dp_i$$

3.3. La fonction d'utilité de type Cobb-Douglas et l'équation de Slutsky

On peut retrouver l'équation de Slutsky dans le cas de la fonction d'utilité de type Cobb-Douglas avec 2 biens.

Comme on l'a vu précédemment, on a alors la fonction de demande hicksienne pour le bien 1 qui est :

$$h_1(p_1, p_2, U) = \left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-a} U$$

Si on dérive par rapport aux prix, on obtient :

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = \left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a} p_2^{\ 1-a}\ U\ (a-1)\ p_1^{\ a-2} = -a^{1-a}\ (1-a)^a\ p_2^{\ 1-a} p_1^{\ a-2}\ U$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2} = \left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a} p_2^{\ -a}\ U\ (1-a)\ p_1^{\ a-1} = a^{1-a}(1-a)^a\ p_2^{\ -a} p_1^{\ a-1}\ U$$

On peut remplacer U par la fonction d'utilité indirecte car cette fonction représente l'utilité maximum obtenue à l'optimum du consommateur :

$$V(p_1, p_2, R) = a^a (1-a)^{1-a} R\ p_1^{\ -a} p_2^{\ a-1}$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = -a^{1-a}\ (1-a)^a\ p_2^{\ 1-a} p_1^{\ a-2}\ U = -a^{1-a}\ (1-a)^a\ p_2^{\ 1-a} p_1^{\ a-2} a^a (1-a)^{1-a} R\ p_1^{\ -a} p_2^{\ a-1} = -a(1-a)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2} = a^{1-a}(1-a)^a\ p_2^{\ -a} p_1^{\ a-1}\ U = a^{1-a}(1-a)^a\ p_2^{\ -a} p_1^{\ a-1} a^a (1-a)^{1-a} R\ p_1^{\ -a} p_2^{\ a-1} = a(1-a)R\ p_1^{\ -1} p$$

Les fonctions de demande marshalienne pour les biens 1 et 2 sont :

$$x_1(p_1, p_2, R) = \frac{aR}{p_1}$$
$$x_2(p_1, p_2, R) = \frac{(1-a)R}{p_2}$$

Si on dérive la fonction de demande du bien 1 par rapport au revenu et aux prix, on obtient :

$$\frac{\partial x_1}{\partial R} = \frac{a}{p_1}$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -aR\, p_1^{-2}$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_2} = 0$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial R} x_1 = -a(1-a)R\ p_1^{-2} - \frac{a}{p_1}\frac{aR}{p_1} = -aR\ p_1^{-2} = \frac{\partial x_1}{\partial R}$$
$$\frac{\partial h_1}{\partial p_2} - \frac{\partial x_1}{\partial R} x_2 = a(1-a)R\ p_1^{-a} p_2^{-a} - \frac{a}{p_1}(1-a)\frac{R}{p_2} = 0 = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}$$

ce qui correspond bien aux équations de Slutsky.

4. LES ELASTICITES

Comme nous l'avions vu graphiquement, la variation de la consommation d'un bien qui résulte de la variation ou des prix peut différer fortement selon les biens. Pour mesurer cette plus ou moins grande sensibilité de la demande au revenu et aux prix, on se réfère généralement à la notion d'élasticité.

4.1. L'élasticité revenu

On appelle élasticité revenu de la demande en bien i, le rapport de la variation relative de la demande de bien i et de la variation relative du revenu, soit :

$\eta_i = \dfrac{\dfrac{dx_i(p,R)}{x_i}}{\dfrac{dR}{R}} = \dfrac{dx_i}{dR}\dfrac{R}{x_i}$ (quand il est évident que l'on parle de demande Marshalienne, il n'est pas utile d'écrire l'intégralité de la fonction de demande).

Pour des petites variations du revenu, cette élasticité peut se calculer par les dérivées partielles : $\eta_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial R}\dfrac{R}{x_i}$.

Soit q_i, le coefficient budgétaire du bien i qui mesure la part du revenu du consommateur consacrée à l'achat de bien i.

$$\theta_i = \frac{p_i x_x(p,R)}{R}$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^{N}\theta_i = 1$$

On obtient donc : $\dfrac{\partial \theta_i}{\partial R} = \dfrac{p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial R} R - p_i x_i}{R^2}$

On a donc :

$\frac{\partial \theta_i}{\partial R} > 0$ si $\frac{\partial x_i}{\partial R} R - x_i > 0$ cad si $\eta_i > 1$: la part du revenu consacré à ce type de bien augmente avec le revenu, ce sont des biens de luxe (loisir, culture, transport, etc.)

$\frac{\partial \theta_i}{\partial R} = 0$ si $\frac{\partial x_i}{\partial R} R - x_i = 0$ cad si $\eta_i = 1$: cela caractérise des biens dont le coefficient budgétaire ne varie pas sensiblement avec le revenu, ce sont des biens normaux.

$\frac{\partial \theta_i}{\partial R} < 0$ si $\frac{\partial x_i}{\partial R} R - x_i < 0$ cad si $\eta_i < 1$: le coefficient budgétaire de ces biens diminue lorsque le revenu augmente, c'est le cas de la plupart des biens de 1ère nécessité que l'on appelle généralement des biens prioritaires (alimentation). Dans ce dernier cas, on peut avoir aussi les biens inférieurs pour lesquels $\eta_i < 0$ c'est-à-dire dont la consommation diminue lorsque le revenu augmente. Ce sont les biens inférieurs comme certains biens alimentaires (pomme de terre, pain).

4.2. L'élasticité prix directe

On appelle élasticité prix directe de la demande en bien i, le rapport de la variation de la demande de bien i et de la variation du prix du bien i, soit (pour de petites variations):

$$\varepsilon_i = \frac{\frac{dx_i}{x_i}}{\frac{dp_i}{p_i}} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}$$

Cette élasticité prix directe est généralement négative sauf dans le cas (plus théorique que réel) des biens Giffen.

Pour préciser la relation entre élasticités prix directe et sensibilité de la demande, on note D_i, la dépense du consommateur en bien i :

$D_i = p_i\, x_i(p,R)$

On a donc : $\frac{\partial D_i}{\partial p_i} = x_i + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = x_i(1 + \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_i}) = x_i(1+\varepsilon_i)$

On obtient alors : $$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} > 0 \text{ si } \varepsilon_i > -1$$
$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} < 0 \text{ si } \varepsilon_i < -1$$

On a donc 2 types de biens. Ceux dont l'élasticité prix directe est faible en valeur absolue ($\varepsilon_i > -1$). Pour ces biens, la hausse du prix ne réduit que faiblement la demande de sorte que la dépense augmente. Les produits alimentaires et l'énergie font partie des biens dont la demande est faiblement élastique par rapport au prix. On a d'autre part les biens dont la demande est fortement élastique au prix ($\varepsilon_i < -1$). Une hausse des prix conduit alors à une forte réduction de la consommation. Ce sont par exemple de nombreux biens de loisir ou de culture.

4.3. L'élasticité prix croisée

On appelle élasticité prix croisée de la demande en bien i par rapport au prix du bien j le rapport de la variation relative de la demande de bien i et de la variation relative du prix du bien j, soit (pour de petites variations):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\frac{dx_i}{x_i}}{\frac{dp_j}{p_j}} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_i}$$

Lorsque cette élasticité est positive, cela signifie que les 2 biens sont substituables tandis que si elle est négative, les 2 biens sont complémentaires. Une élasticité nulle signifie que les 2 biens sont indépendants (trop éloignés pour que la consommation de l'un influence celle de l'autre).

Etant donnés ces différentes élasticités, on peut alors réécrire l'équation de Slutsky en termes d'élasticité.

4.4. L'équation de Slutsky en termes d'élasticité

L'équation de Slutsky est :

$$\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p,U)}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R}x_i(p,R)$$

Si on multiplie cette équation par p_i/x_j, on obtient :

$$\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_j(p,R)}=\frac{\partial h_j(p,U)}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_j(p,R)}-\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R}x_i(p,R)\frac{p_i}{x_j(p,R)}$$

$$\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_j(p,R)}=\frac{\partial h_j(p,U)}{\partial p_i}\frac{p_i}{x_j(p,R)}-\frac{\partial x_j(p,R)}{\partial R}x_i(p,R)\frac{p_i}{x_j(p,R)}\frac{R}{R}$$

soit

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}\big|_{\overline{U}}-\eta_j.\theta_i$$

L'élasticité prix croisée du bien j = élasticité prix croisée compensée du bien j (i.e. à utilité constante) – élasticité revenu du bien j* coefficient budgétaire du bien i.