

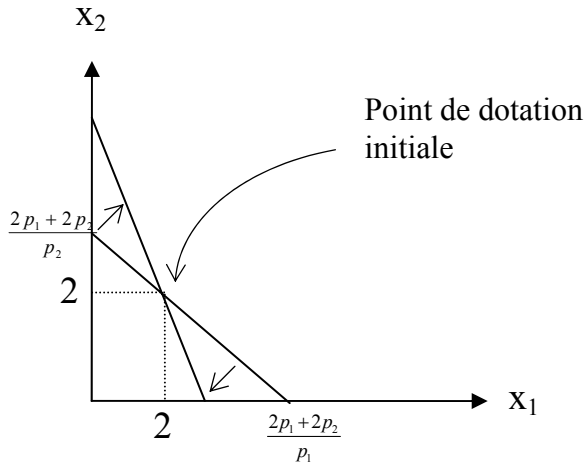
CORRIGE TD 1

Question 1.3.

a. Si on appelle p_1 et p_2 les prix des biens 1 et 2, et ω_1 et ω_2 les dotations initiales du consommateur pour les biens 1 et 2, la contrainte budgétaire du consommateur est définie par :

$$\boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 = 2p_1 + 2p_2}$$

Représentation graphique :



La dotation initiale est toujours sur la droite de budget.

Si le prix du bien 1 augmente, on a une rotation de la droite de budget autour du point de dotation initiale.

On a donc :

- une réduction du montant maximum de bien 1 qui peut être acheté du fait de l'augmentation du prix (l'abscisse à l'origine définie par : $\frac{2p_1 + 2p_2}{p_1} = 2 + \frac{2p_2}{p_1}$ est décroissante avec p_1).

- une augmentation du montant maximum de bien 2 qui peut être acheté (effet revenu lié au fait que le revenu de l'individu dépend des prix : si p_1 augmente, le revenu de l'individu augmente et donc le montant maximum de bien 2 qui peut être acheté aussi. On constate que l'ordonnée à l'origine définie par $\frac{2p_1 + 2p_2}{p_2}$ est croissante avec p_1).

b. Le programme du consommateur s'écrit :

$$\text{Max. } U = \log x_1 + \log x_2$$

$$\text{s.c. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = 2p_1 + 2p_2$$

A partir de la contrainte de budget :

$$x_1 = \frac{2p_1 + 2p_2 - p_2 x_2}{p_1} \quad (1)$$

$$\text{d'où : Max } U = \log\left(\frac{2p_1 + 2p_2 - p_2 x_2}{p_1}\right) + \log x_2$$

La condition d'optimalité s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{2p_1 + 2p_2 - p_2 x_2} + \frac{1}{x_2} = 0$$

$$\text{soit } \frac{p_2}{2p_1 + 2p_2 - p_2 x_2} = \frac{1}{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad p_2 x_2 = 2p_1 + 2p_2 - p_2 x_2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2p_2 x_2 = 2p_1 + 2p_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{p_1 + p_2}{p_2}}$$

$$\text{En reprenant (1) : } x_1 = \frac{2p_1 + 2p_2 - p_2 \left(\frac{p_1 + p_2}{p_2} \right)}{p_1}$$

$$x_1 = \frac{2p_1 + 2p_2 - p_1 - p_2}{p_1}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{p_1 + p_2}{p_1}}$$

c.

On refait la même analyse en notant ω_1 la dotation initiale de bien 1 (au lieu de 2).

$$\text{Max. } U = \log x_1 + \log x_2$$

$$\text{s.c. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \omega_1 + 2p_2$$

Le programme de maximisation devient :

$$\text{Max } U = \log\left(\frac{p_1 \omega_1 + 2p_2 - p_2 x_2}{p_1}\right) + \log x_2$$

Condition d'optimalité :

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{p_2}{p_1 \omega_1 + 2p_2 - p_2 x_2} + \frac{1}{x_2} = 0$$

$$\text{Solution : } \boxed{x_2 = \frac{p_1 \omega_1 + 2p_2}{2p_2}}$$

Une augmentation de ω_1 entraîne une augmentation de x_2 (conséquence de l'effet revenu ou richesse qui provient de la dotation supplémentaire).

Question 1.4.

$$\text{a. Max } U^1(x_1, x_2) = \log x_1 + 2 \log x_2$$

$$\text{s.c. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$$

Méthode du Lagrangien :

$$L = \log x_1 + 2 \log x_2 + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

Conditions d'optimalité :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{2}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \quad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{p_1 x_1}$$

$$(2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{p_2 x_2}$$

$$\text{D'où : } 2p_1 x_1 = p_2 x_2$$

$$\text{En remplaçant dans (3) : } R - p_1 x_1 - 2p_1 x_1 = 0$$

$$\text{Soit } \boxed{x_1 = \frac{R}{3p_1}} \text{ et } x_2 = \frac{2p_1 x_1}{p_2} = \frac{2p_1 \left(\frac{R}{3p_1}\right)}{p_2} \text{ soit } \boxed{x_2 = \frac{2R}{3p_2}}$$

$$\text{b. Max } U^2(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$$

$$\text{s.c. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$$

$$\begin{aligned} \text{Méthode } TMS_{21} = \frac{p_1}{p_2} &\Leftrightarrow \frac{x_2^2}{2x_1 x_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ &\Leftrightarrow \frac{x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ &\Leftrightarrow 2x_1 p_1 = x_2 p_2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } 3x_1 p_1 = R$$

$$\boxed{x_1 = \frac{R}{3p_1}} \text{ et } \boxed{x_2 = \frac{2R}{3p_2}}$$

Conclusion : les 2 fonctions d'utilité conduisent aux mêmes fonctions de demande. Cela s'explique par le fait que : $U^2 = \exp(U^1)$. La fonction d'utilité U^2 se déduit donc de U^1 par une transformation monotone croissante (puisque la fonction exponentielle est une fonction strictement croissante).

Remarque : Ce qui importe pour la définition d'une fonction d'utilité n'est pas la quantification de l'utilité en tant que telle, mais simplement le fait que la fonction soit en mesure de traduire analytiquement les préférences ordinales du consommateur. Toute fonction d'utilité compatible avec ces préférences fait donc l'affaire.

Aussi, la fonction U n'est pas définie de manière unique. Comme seul le classement des paniers importe, il n'existe pas une façon unique d'attribuer des niveaux d'utilité aux différents paniers de biens que le consommateur peut envisager de consommer. U^2 et $U^{1/2}$ vérifient également cette équivalence entre préférences individuelles et utilité (si $U(\cdot)$ positive). Elles « déforment » l'échelle de préférence mais ne changent pas le classement des paniers des biens sur cette échelle. Plus généralement, on voit que les fonctions d'utilité construites à partir d'une relation de préférence donnée ne sont définies qu'à une fonction croissante près. Si nous pouvons trouver une fonction d'utilité qui reflète les préférences d'un consommateur, nous pouvons en trouver une infinité : toute transformation monotone croissante de la fonction d'utilité est aussi une fonction d'utilité valide.

Une transformation monotone est représentée habituellement par une fonction $f(u)$ qui transforme chaque nombre u en un nombre $f(u)$ de telle sorte que le classement entre les nombres

soit respecté. C'est-à-dire que si $u_1 > u_2 \Rightarrow f(u_1) > f(u_2)$. Par exemple multiplication par un nombre positif ; porter la fonction à une puissance impaire ; paire si $U(\cdot)$ toujours positive.

Question 1.5. L'effet d'un changement de prix : effet revenu et effet substitution

a. Le programme du consommateur s'écrit :

$$\text{Max. } U(x_1, x_2) = x_1(x_2 - 1)$$

$$\text{s.c. } p_1x_1 + p_2x_2 = R$$

Méthode du multiplicateur de Lagrange :

$$L = x_1(x_2 - 1) + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2)$$

Conditions d'optimalité :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 1 - \lambda p_1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \quad (3)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \lambda = \frac{x_2 - 1}{p_1} = \frac{x_1}{p_2}$$

$$\text{Et donc : } p_1x_1 = p_2(x_2 - 1)$$

En remplaçant dans la contrainte budgétaire :

$$p_2(x_2 - 1) + p_2x_2 = R$$

$$2p_2x_2 - p_2 = R$$

$$\boxed{x_2 = \frac{R + p_2}{2p_2}}$$

$$\text{Et } p_1x_1 = p_2\left(\frac{R + p_2}{2p_2} - 1\right)$$

$$p_1x_1 = \frac{R + p_2}{2} - p_2$$

$$\boxed{x_1 = \frac{R - p_2}{2p_1}}$$

b. On obtient la réponse directement en reportant les valeurs de p_1 , p_2 et R dans les fonctions de demande.

Situation initiale : $p_1 = p_2 = 1$ et $R = 3$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Situation finale : $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ et $R = 3$

$$x_1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$$

c. Effet de substitution et effet de revenu

On constate que quand p_2 augmente, x_1 diminue et x_2 diminue. Que se passe-t-il en fait ?

Décomposition : 2 effets

L'effet global d'une variation du prix de l'un des deux biens donne lieu à 2 effets : 1 effet substitution (ou effet prix) et 1 effet revenu.

Ex (ici) : augmentation du prix d'un bien (bien 2) :

modification des prix relatifs \Rightarrow le consommateur va avoir tendance, toutes choses égales par ailleurs, à augmenter la quantité demandée du bien devenu relativement moins cher (bien 1) et à diminuer la quantité demandée de l'autre bien (bien 2).

la hausse du prix du bien 2 provoque aussi, toutes choses égales par ailleurs, une diminution du pouvoir d'achat du consommateur. On peut donc s'attendre à ce que la demande de tous les biens diminue (sauf cas particulier comme les biens Giffen par exemple)

Récapitulatif :

Augmentation de p_2	Effet substitution	Effet revenu	Effet total
x_1	+	-	?
x_2	-	-	-

Dans notre cas, l'effet total sur x_1 est négatif (diminution) \Rightarrow effet revenu $>$ effet substitution.

Pour essayer de quantifier ces 2 effets, il existe 2 méthodes principales : la méthode de Slutsky et la méthode de Hicks

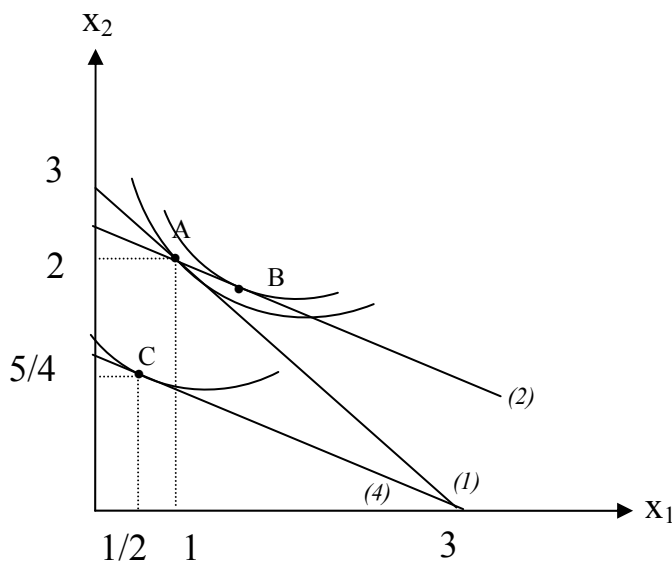
Méthode de Slutsky

Cette méthode de décomposition repose sur l'idée fondamentale selon laquelle l'effet substitution se produit à **pouvoir d'achat constant**.

Graphiquement : on construit une droite de budget fictive ayant pour pente le nouveau rapport des prix relatifs, passant toujours par le 1^{er} point d'équilibre A.

A reste accessible mais n'est plus optimal \Rightarrow B (effet substitution)

B \Rightarrow C = effet revenu (déplacement parallèle de la droite de budget)



pende $-\frac{p_1}{p_2} = -1$

nouveau rapport des prix : $-\frac{p_1'}{p_2'} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ nouvelle droite de budget

A n'est plus optimal \Rightarrow B. Effet substitution : x_1 augmente et x_2 diminue

Effet revenu : déplacement parallèle de la droite de budget

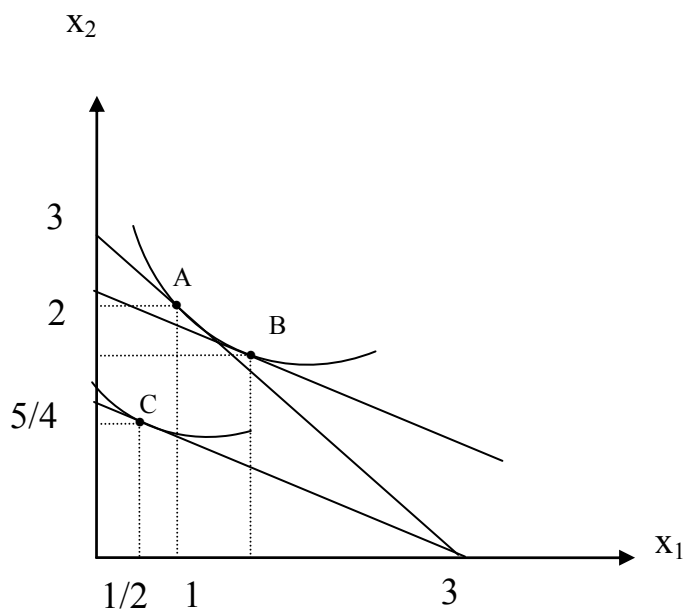
Méthode de Hicks

On considère cette fois la variation des prix relatifs, en ajustant le revenu nominal de façon à maintenir **l'utilité du consommateur constante**.

Graphiquement : on construit une droite de budget fictive ayant pour pente le nouveau rapport des prix relatifs, mais tangente à la courbe d'indifférence passant par A. Le pouvoir d'achat associé à cette nouvelle droite ne permet plus d'acheter A mais maintient l'utilité du consommateur constante (idée de « variation compensatrice de revenu » permettant de maintenir l'utilité initiale).

A \rightarrow B : effet substitution

B \rightarrow C : effet revenu



Les coordonnées du point intermédiaire B peuvent être calculées :

Situation intermédiaire caractérisée par : $TMS_{21} = \frac{p_1'}{p_2'}$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2 - 1}{x_1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2(x_2 - 1)$$

et comme on est sur la même courbe d'indifférence que A, on a $U(1;2) = x_1(x_2 - 1) = 1$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \frac{1}{x_2 - 1} = 2(x_2 - 1) &\Leftrightarrow (2x_2 - 2)(x_2 - 1) = 1 \\ &\Leftrightarrow (2x_2 - 2)(x_2 - 1) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x_2^2 - 4x_2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Résolution d'une équation du second degré

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8$$

$$\text{Solutions : } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{8}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Et } x_1 = 2(x_2 - 1) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \sqrt{2}$$

A partir des coordonnées du point B, ainsi calculées, il est possible de calculer très précisément l'effet substitution et l'effet revenu.

Question 1.6.

a. Max. $U(T, M) = T^{1/3} M^{2/3}$

s.c. $p_T T + p_M M = R$ soit $40T + 20M = 2000$

$$\begin{aligned} \text{Égalité } TMS_{MT} = \frac{p_T}{p_M} &\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial U}{\partial T}}{\frac{\partial U}{\partial M}} = \frac{p_T}{p_M} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} T^{(-2/3)} \times M^{2/3}}{\frac{2}{3} M^{(-1/3)} \times T^{1/3}} = \frac{p_T}{p_M} \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3} \times M^{1/3} \times M^{2/3}}{\frac{2}{3} \times T^{2/3} \times T^{1/3}} = \frac{40}{20} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{M}{T} = 2 \\ &\Leftrightarrow M = 4T \end{aligned}$$

En remplaçant dans la contrainte de budget :

$$40T + 20 \times (4T) = 2000 \quad \text{soit} \quad 120T = 2000$$

$$\text{d'où : } \boxed{T = \frac{50}{3} \approx 16.7} \quad \text{et} \quad \boxed{M = \frac{200}{3} \approx 66.7}$$

b. $p_T = 80$

$$\begin{aligned} \text{Idem : } TMS_{MT} = \frac{p_T}{p_M} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{M}{T} = \frac{80}{20} \\ &\Leftrightarrow M = 8T \end{aligned}$$

Et la contrainte budgétaire :

$$80T + 20 \times (8T) = 2000 \quad \text{soit} \quad 240T = 2000$$

$$\text{d'où : } \boxed{T = \frac{50}{6} \approx 8.33} \quad \text{et} \quad \boxed{M = \frac{400}{6} = \frac{200}{3} \approx 66.7}$$

La consommation de T diminue du fait de l'augmentation de son prix.

La consommation de M reste inchangée : l'effet de substitution et l'effet revenu se compensent.