

CORRIGE TD 10

Question 10.2.

a.

$$Q_A = 40 - 5P_A \Leftrightarrow P_A = 8 - (Q_A/5)$$

$$Q_B = 80 - 12P_B \Leftrightarrow P_B = (20/3) - (Q_B/12)$$

$$Q_C = 100 - 10P_C \Leftrightarrow P_C = 10 - (Q_C/10)$$

$$\sum DMP = 8 - (Q/5) + (20/3) - (Q/12) + 10 - (Q/10) = (74/3) - (23Q/60)$$

Condition BLS : $\sum DMP = Cm$ soit $(74/3) - (23Q^*/60) = 12$

$$Q^* = 760 / 23 = 33,04$$

b.

$$P_A = 8 - (Q^*/5) = 1,39$$

$$P_B = (20/3) - (Q^*/12) = 3,91$$

$$P_C = 10 - (Q^*/10) = 6,70$$

=> On a bien une quantité produite unique et des prix personnalisés pour pouvoir profiter de cette quantité.

Question 10.3.

a. Une allocation (x, M_1, M_2) est compatible avec le financement du bien public si :

$$t_1 + t_2 = CT$$

Or, $t_1 = 15 - M_1$ et $t_2 = 15 - M_2$

D'où : $15 - M_1 + 15 - M_2 = x$ soit : $30 - M_1 - M_2 = x$

Compte tenu des conditions de signe, l'ensemble des allocations réalisables (x, M_1, M_2) est donc défini par :

$$\begin{aligned} x > 0, M_1 > 0, M_2 > 0 \\ x + M_1 + M_2 = 30 \end{aligned}$$

b. La condition BLS s'écrit : $\sum TMS_i = Cm(x)$

$$TMS_1 = \frac{\partial U_1 / \partial x}{\partial U_1 / \partial M_1} = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{M_1}} = \frac{2M_1}{x}$$

$$TMS_2 = \frac{\partial U_2 / \partial x}{\partial U_2 / \partial M_2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{M_2}} = \frac{M_2}{2x}$$

$$Cm(x) = \frac{\partial CT}{\partial x} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \frac{2M_1}{x} + \frac{M_2}{2x} = 1 &\Leftrightarrow \frac{4M_1 + M_2}{2x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 4M_1 + M_2 = 2x \end{aligned}$$

Il faut en plus tenir compte des conditions de réalisabilité définies à la question précédente : $x + M_1 + M_2 = 30$ soit $M_1 = 30 - M_2 - x$

En l'intégrant dans la condition BLS, on trouve :

$$\begin{aligned}
 4(30 - M_2 - x) + M_2 = 2x &\Leftrightarrow 120 - 4M_2 - 4x + M_2 = 2x \\
 &\Leftrightarrow 120 - 3M_2 = 6x \\
 &\Leftrightarrow M_2 = \frac{120 - 6x}{3} = 40 - 2x
 \end{aligned}$$

Et $M_1 = 30 - M_2 - x = 30 - 40 + 2x - x = x - 10$

De plus, les conditions de signe ($x > 0, M_1 > 0, M_2 > 0$) impliquent : $10 < x < 20$

L'ensemble des optima des Pareto est donc défini par les conditions suivantes :

| |
|---|
| $ \begin{aligned} M_1 &= x - 10 \\ M_2 &= 40 - 2x \\ 10 &< x < 20 \end{aligned} $ |
|---|

c. Les contraintes budgétaires impliquent que si $t_1 = t_2$, on a $M_1 = M_2$ et donc :

$$x - 10 = 40 - 2x$$

Ce qui implique : $3x = 50$ soit $x = \frac{50}{3}$

Et : $M_1 = M_2 = \frac{50}{3} - 10 = 40 - \frac{100}{3} = \frac{20}{3}$

L'optimum de Pareto associé à des prélèvements identiques est donc l'allocation $(\frac{50}{3}; \frac{20}{3}; \frac{20}{3})$.

Cet optimum de Pareto conduit à des contributions : $t_1 = t_2 = 15 - M_i = 15 - \frac{20}{3} = \frac{25}{3}$.

d. L'équilibre de Lindahl est défini par la quantité de bien collectif et l'ensemble des prix individuels (p_1 et p_2) qui permettent à chaque individu de maximiser son utilité et à l'entreprise qui produit le bien collectif de maximiser son profit.

1) Maximisation de l'utilité de l'individu 1 :

Max. $U_1 = 2 \log x_1 + \log M_1$

s.c. $p_1 x_1 + M_1 = 15$

En intégrant la contrainte budgétaire dans la fonction d'utilité, on obtient :

Max. $U_1 = 2 \log x_1 + \log(15 - p_1 x_1)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{2}{x_1} + \frac{-p_1}{15 - p_1 x_1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{x_1} = \frac{p_1}{15 - p_1 x_1} \\
 &\Leftrightarrow 30 - 2p_1 x_1 = p_1 x_1 \\
 &\Leftrightarrow 3p_1 x_1 = 30 \\
 &\Leftrightarrow p_1 x_1 = 10 \\
 &\Leftrightarrow \boxed{x_1 = \frac{10}{p_1}}
 \end{aligned}$$

Il s'agit de la fonction de demande de bien collectif du consommateur 1.

2) Maximisation de l'utilité de l'individu 2 :

$$\text{Max. } U_2 = \log x_2 + 2 \log M_2$$

$$\text{s.c. } p_2 x_2 + M_2 = 15$$

En intégrant la contrainte budgétaire dans la fonction d'utilité, on obtient :

$$\text{Max. } U_2 = \log x_2 + 2 \log(15 - p_2 x_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2} + 2 \frac{-p_2}{15 - p_2 x_2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{2p_2}{15 - p_2 x_2} \\ &\Leftrightarrow 15 - p_2 x_2 = 2p_2 x_2 \\ &\Leftrightarrow 3p_2 x_2 = 15 \\ &\Leftrightarrow p_2 x_2 = 5 \\ &\Leftrightarrow \boxed{x_2 = \frac{5}{p_2}} \end{aligned}$$

Il s'agit de la fonction de demande de bien collectif du consommateur 2.

A l'équilibre de Lindahl, les prix personnalisés p_1 et p_2 conduisent les consommateurs à demander

la même quantité de bien collectif. On a donc $x = x_1 = x_2$, soit : $\frac{10}{p_1} = \frac{5}{p_2} \Leftrightarrow$

$$5p_1 = 10p_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p_1 = 2p_2}$$

3) Maximisation du profit de l'entreprise :

$$\Pi = RT - CT = (p_1 + p_2)x - x = (p_1 + p_2 - 1)x$$

Le profit est à son maximum pour : $p_1 + p_2 - 1 = 0$ soit $\boxed{p_1 + p_2 = 1}$

En combinant les 2 conditions ainsi définies, on trouve :

$$2p_2 + p_2 = 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{p_2 = \frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{p_1 = \frac{2}{3}}$$

$$\text{On en déduit : } x = x_1 = x_2 = \frac{10}{2/3} = \frac{5}{1/3} = 15 \quad \text{soit} \quad \boxed{x = 15}$$

$$M_1 = 15 - p_1 x = 15 - \frac{2}{3} \times 15 = 5 \quad \text{soit} \quad \boxed{M_1 = 5}$$

$$M_2 = 15 - p_2 x = 15 - \frac{1}{3} \times 15 = 10 \quad \text{soit} \quad \boxed{M_2 = 10}$$

Le vecteur $(x, M_1, M_2) = (15, 5, 10)$ vérifie les conditions qui caractérisent les optima de Pareto, telles que définies dans la question b.

e. L'utilité du premier consommateur s'exprime en fonction des contributions t_1 et t_2 par :

$$U_1 = 2 \log(t_1 + t_2) + \log(15 - t_1)$$

L'individu 1 détermine sa contribution t_1 en maximisant U_1 pour t_2 donné. On a :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t_1} = \frac{2}{t_1 + t_2} - \frac{1}{15 - t_1} = \frac{30 - 3t_1 - t_2}{(t_1 + t_2)(15 - t_1)}$$

Comme $x = t_1 + t_2 > 0$ et $M_1 = 15 - t_1 > 0$, $\frac{\partial U_1}{\partial t_1}$ est du signe de $30 - 3t_1 - t_2$.

Comme la contribution de l'individu 1 doit être positive ou nulle ($t_1 \geq 0$), il choisit :

$$t_1 = \frac{30-t_2}{3} \quad \text{si } t_2 \leq 30$$

$$t_1 = 0 \quad \text{si } t_2 > 30$$

Ceci correspond à la fonction de réaction de l'individu 1, c'est-à-dire à la contribution choisie par l'individu 1 lorsque l'individu 2 a choisi t_2 .

De même on a :

$$U_2 = \log(t_1 + t_2) + 2 \log(15 - t_2)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t_2} = \frac{1}{t_1 + t_2} - \frac{2}{15 - t_2} = \frac{15 - 2t_1 - 3t_2}{(t_1 + t_2)(15 - t_2)}$$

Comme $x = t_1 + t_2 > 0$ et $M_2 = 15 - t_2 > 0$, $\frac{\partial U_2}{\partial t_2}$ est du signe de $15 - 2t_1 - 3t_2$.

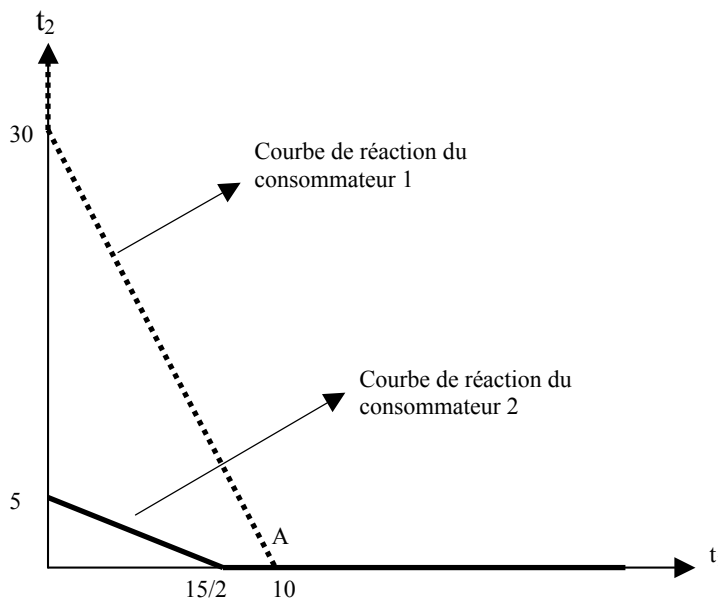
Comme la contribution de l'individu 2 doit être positive ou nulle ($t_2 \geq 0$), il choisit :

$$t_2 = \frac{15-2t_1}{3} \quad \text{si } t_1 \leq \frac{15}{2}$$

$$t_2 = 0 \quad \text{si } t_1 > \frac{15}{2}$$

Ceci correspond à la fonction de réaction de l'individu 2.

A l'équilibre de souscription, les contributions t_1 et t_2 sont une réponse optimale à la décision de l'autre agent. Le couple (t_1, t_2) doit donc être sur les deux courbes de réaction. On peut les représenter ainsi :



L'unique point commun des 2 courbes de réaction est le point A sur la figure, pour lequel on a $t_1=10$ et $t_2=0$.

L'équilibre de souscription conduit donc à :

$$\begin{array}{l} x = t_1 + t_2 = 10 \\ M_1 = 15 - t_1 = 5 \\ M_2 = 15 - t_2 = 15 \end{array}$$

On a alors : $M_1 \neq x - 10$ et $M_2 \neq 40 - 2x$

L'équilibre sous souscription n'est donc pas un optimum de Pareto. Cela s'explique par le fait que l'individu 2 se comporte en passager clandestin : il préfère ne pas apporter de contribution au financement du bien collectif et bénéficier simplement de la contribution de l'individu 1.